Université Clermont Auvergne — Année 2025–2026
Travaux Dirigés de Licence 1ère année — Mathématiques S1

U.E. – L1 Mathématiques S1

Contrôle continu du 11 Décembre

Durée : 45 minutes.
Les calculatrices non programmables sont autorisées ; les documents et autres matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 :
(7 points)

1. Soit P un polynôme dans $\mathbb{R}[X]$ de degré 4.
   (a) Peut-on déduire si P est irréductible ? Si oui, est-ce qu'il est irréductible ou pas ?
   (b) Soit m le nombre de racines réelles de P. Quelles sont les valeurs possibles de m ?
2. Soit maintenant $P = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$.
   (a) Déterminer l'ensemble des racines complexes de $Q = (1+X)P$. En déduire l'ensemble des racines complexes de P.
   (b) Trouver la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.
   (c) Trouver la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2 :
(7 points)

1. Trouver toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - 2z + 10 = 0$.
2. Soit $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (a) Trouver toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = j$.
   (b) Trouver toutes les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^4 = \bar{j}$.
   (c) En déduire l'ensemble des solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.
   (Indication : calculer $j\bar{j}$ et $j + \bar{j}$.)
   (d) Soit z_0 l'une des solutions de la partie (c). Calculer z_0^{12}.

Exercice 3 :
(6 points)

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme
$$X^3 - (a+b+3)X^2 + (2a+2b+ab+3)X - (a+b+ab+1)$$
selon les valeurs de a et b.
2. On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on cherche les paires $(c, d) \in \mathbb{C}^2$ de nombres complexes telles que
$$cd = \lambda = c + d \qquad (\star)$$
   (a) Écrire un polynôme T de degré 2 tel que $(\star)$ est vrai si et seulement si c et d sont les deux racines de T.
   (b) Pour quelles valeurs de λ existe-t-il une paire $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ de nombres *réels* telle que $(\star)$ est vrai ?